

CHAPITRE 03 : SYSTEMES RETICULES

I - DEFINITIONS ET TERMINOLOGIE.

II - HYPOTHESES.

III - COMPRESSION OU TRACTION DANS UNE BARRE.

IV - CALCUL DES EFFORTS DANS LES BARRES D'UN TREILLIS:

- 1) méthode d'isolement des nœuds (méthode analytique)
- 2) méthode de RITTER (méthode analytique)
- 3) méthode CREMONA (méthode graphique)

V - APPLICATION

I - DEFINITIONS ET TERMINOLOGIE

a) **Treillis (ou système triangulé)** : Assemblage de barres rectilignes qui forment un réseau de triangles indéformables. (Figure 1)

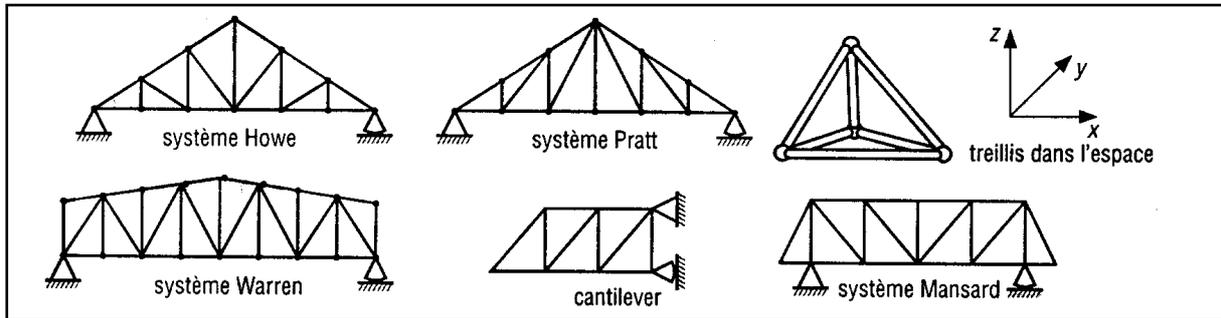


Figure 1: Différents types de systèmes triangulés

Intérêt : alléger les constructions, tout en assurant leur rigidité.

b) **Barres** : dans le cas des treillis, ce sont des poutres en acier ou en bois (le béton armé est très peu utilisé à cause de la fissuration). Selon leur position elles portent des noms différents (Figure 2) :

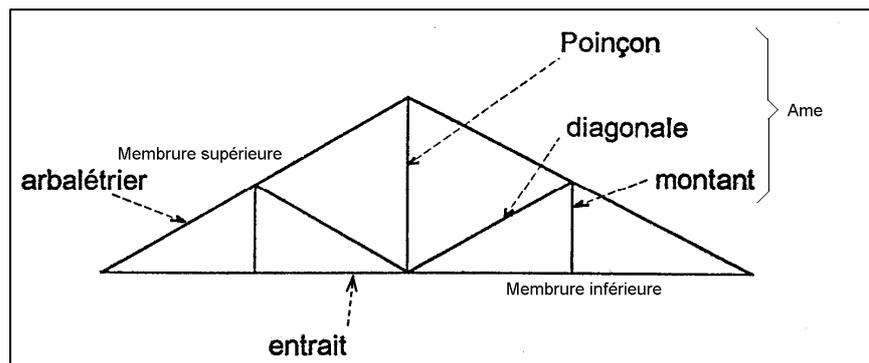


Figure 2 : Dénomination des barres

On utilise souvent des barres symétriques ; des sections symétriques doubles ou des sections symétriques simples (Figure 3) :

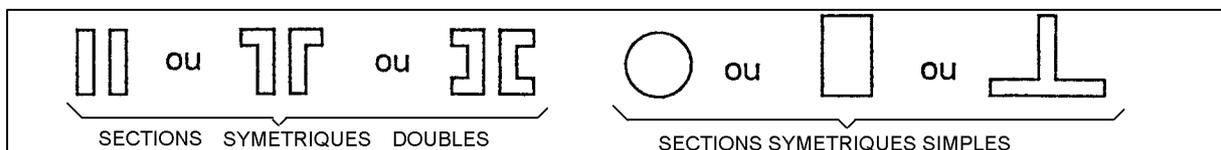


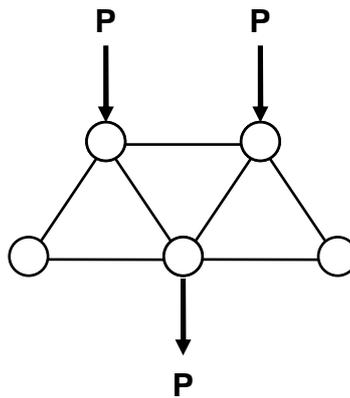
Figure 3 : Exemples de section des barres

c) **Nœuds** : points de rencontre de plusieurs barres. Les nœuds sont constitués par :

- clous, boulons, connecteurs pour les treillis en bois ;
- rivets, boulons, soudure (tubes) pour les treillis en acier.

II - HYPOTHESES :

- le poids des barres est négligé devant les autres forces ;
- les nœuds sont considérés comme étant des **articulations** ;
- les efforts extérieurs appliqués au système réticulé sont **contenus dans le plan** du système et exclusivement **appliqués aux nœuds de la structure** (il n'y a donc que des forces ponctuelles) ;
- Les lignes moyennes des barres sont supposées être **dans un même plan et concourantes aux nœuds**.

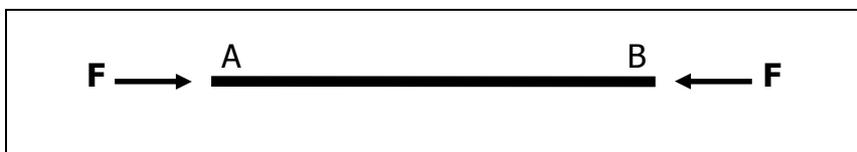


III - COMPRESSION OU TRACTION DANS UNE BARRE :

On peut déduire des hypothèses précédentes qu'une barre quelconque de la structure est en équilibre sous l'effet des seuls efforts qui lui sont transmis par l'intermédiaire des nœuds.

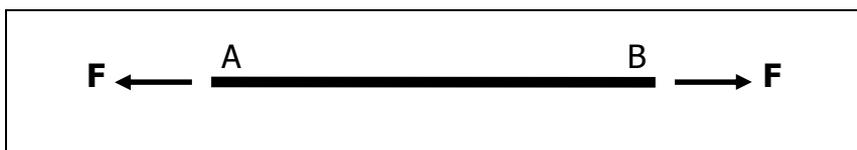
Ainsi, elle ne peut être soumise qu'à deux efforts opposés, portés par l'axe de la barre :

Deux cas sont possibles :



Compression simple

OU

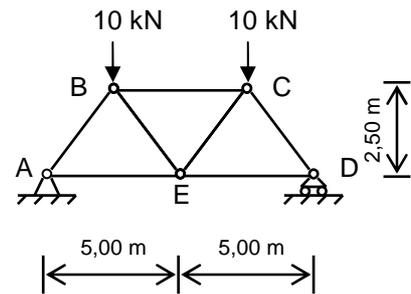


Traction simple

IV - DETERMINATION DES EFFORTS DANS LES BARRES D'UN TREILLIS:

Objectif : calculer les efforts dans les barres d'un système treillis et déterminer si celles - ci sont tendues ou comprimées.

Nous étudierons 3 types de résolutions en nous appuyant sur un exemple simple présenté ci-contre :



1 - Méthode d'isolement des nœuds (méthode analytique).

a) calculer les inconnues de liaisons extérieures :

$$\begin{aligned} A_x &= 0 \\ A_y &= 10 \text{ kN} \\ B_y &= 10 \text{ kN} \end{aligned}$$

b) isolement du nœud A et application du P.F.S.:

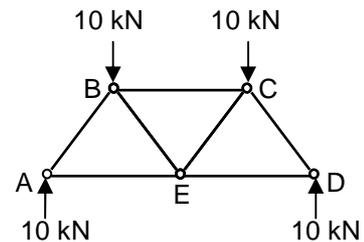
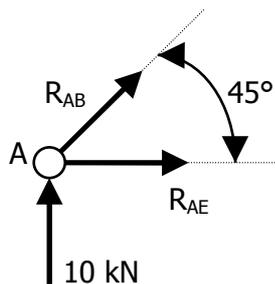


Schéma du nœud isolé



P.F.S. sur le nœud A isolé

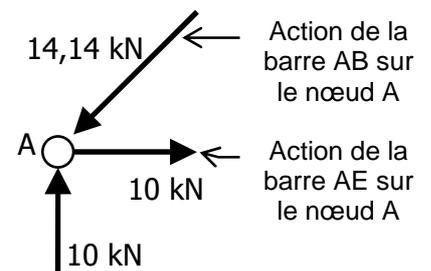
$$\Sigma F/ox = 0 : R_{AE} + R_{AB} \times \cos 45^\circ = 0$$

$$\Sigma F/oy = 0 : 10 + R_{AB} \times \sin 45^\circ = 0$$

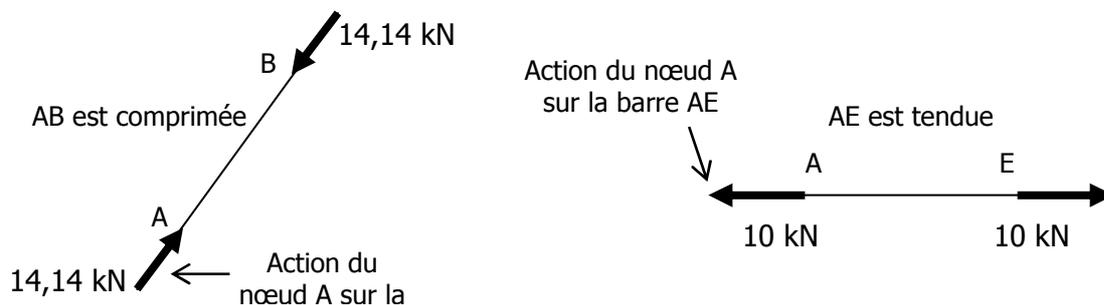
On trouve :

$$\begin{aligned} R_{AE} &= + 10,00 \text{ kN} \\ R_{AB} &= - 14,14 \text{ kN} \end{aligned}$$

Schéma récapitulatif



En appliquant le principe des actions mutuelles sur les barres AB et AE à partir du nœud A, on déduit que :



On applique ainsi la méthode, de proche en proche, à chaque nœuds, en utilisant le principe des actions mutuelles.

Remarque importante : il faut dès le départ choisir l'ordre de résolution des nœuds de façon à ne pas avoir plus de 2 inconnues à chaque fois.

barres	intensités (kN)	sollicitations
AB	- 14,14	compression
AE	+ 10,00	traction
BC		
BE		
CD		
ED		
CE		

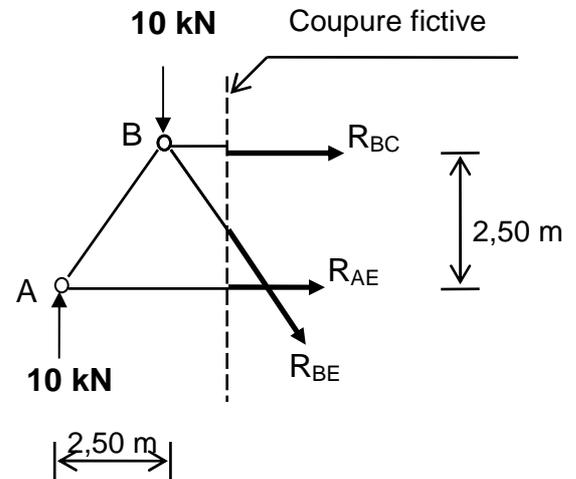
2 - Méthode de RITTER (méthode analytique).

a) calculer les inconnues de liaisons (même calcul que pour la méthode précédente).

b) coupure fictive dans la structure et application du P.F.S. :

On réalise une coupure fictive destinée à faire apparaître des efforts voulus des barres : ici **BC**, **AE** et **BE**.

Ainsi l'avantage de cette méthode réside dans le fait de pouvoir obtenir la valeur de l'effort et l'état dans une barre sans pour autant résoudre tout le système.



On écrit ensuite que les efforts exercés dans les barres « coupées » permettent l'équilibre du tronçon isolé :

$$\begin{aligned} \text{Equilibre} \Leftrightarrow \text{P.F.S.} : \quad \sum F/Ox = 0 : R_{AE} + R_{BC} + R_{BE} \times \cos 45^\circ &= 0 \\ \sum F/Oy = 0 : 10 - 10 - R_{BE} \times \sin 45^\circ &= 0 \\ \sum M/B = 0 : -10 \times 2,50 + R_{AE} \times 2,50 &= 0 \end{aligned}$$

On se retrouve avec un système de trois équations et de trois inconnues, que l'on peut résoudre :

Les valeurs trouvées correspondent aux actions des barres sur les nœuds. En dessinant l'équilibre des barres et des nœuds comme précédemment, on retrouve les mêmes résultats.

$$R_{AE} = + 10,00 \text{ kN}$$

$$R_{BE} = 0$$

$$R_{BC} = - 10,00 \text{ kN}$$

Question :

Où placeriez-vous la coupure imaginaire si l'on vous demandait de déterminer l'effort dans la barre AB ?

Réponse :

3 - Méthode graphique : CREMONA .

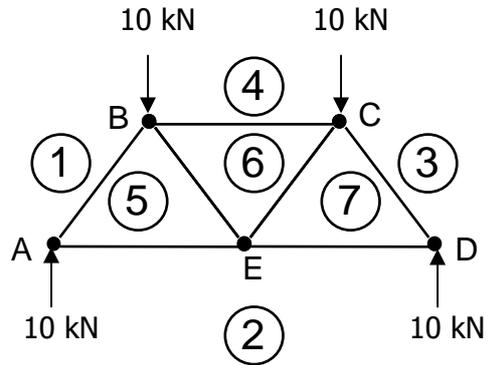
a) calculer les inconnues de liaisons :

$A_x = 0; A_y = 10 \text{ kN}; B_y = 10 \text{ kN}$

b) numérotez les différentes zones :

Sur la structure isolée, on numérote toutes les zones délimitées :

- soit par des efforts,
- soit par des barres.



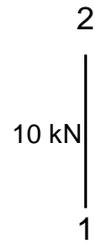
L'ordre de numérotation des zones n'as pas d'importance, mais il ne faut surtout pas en oublier !

On désigne ainsi l'effort $A_y = 10 \text{ kN}$ en A par le numéro des zones qu'il sépare : soit ici 1 - 2 ou 2 - 1.

Le choix 1 - 2 ou 2 - 1 va dépendre du sens de rotation choisi autour des nœuds. On adoptera le sens suivant :

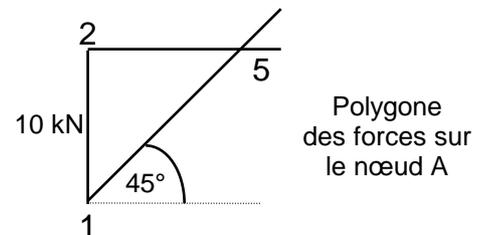


En tournant autour de A dans le sens choisi, on passe de la zone 1 à la zone 2, le sens 1 - 2 correspond au sens de la force A_y qui vaut 10 kN.



Traduisons l'équilibre du nœud A :

- la barre AE ou 2 - 5 est horizontale à partir de 2 ;
- la barre AB ou 5 - 1 est à 45° par rapport à l'horizontale à partir de 1.



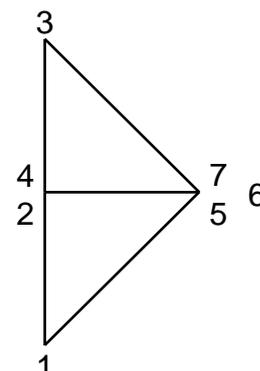
On obtient ainsi la position du point 5 ; il suffit de lire la valeur des efforts dans les deux barres qui arrivent en A sur le polygone des forces :

$AE = (2 - 5) = 10 \text{ kN}$
 $AB = (1 - 5) = 14,14 \text{ kN}$

L'« astuce » de CREMONA consiste à tracer sur une seule figure les polygones relatifs aux différents nœuds. La lecture des efforts recherchés est ainsi immédiate.

c) tracés des polygones relatifs aux différents nœuds sur une seule figure :

Polygone des forces relatif à l'ensemble des nœuds



d) utilisation du CREMONA :

Le CREMONA que l'on vient de tracer donne :

- la valeur de l'effort dans la barre : on fait la lecture directement à l'échelle sur le polygone tracé à l'échelle.
- le signe des efforts dans les barres :

Prenons l'exemple de la barre AB (ou encore 5-1 en tournant autour de A) ; sur le CREMONA, 5-1 est obtenu en dessinant de la droite vers la gauche (sens négatif), cela traduit que la force dans la barre pousse le nœud A. Mais par équilibre du nœud, le nœud A pousse la barre. La barre AB est donc comprimée.

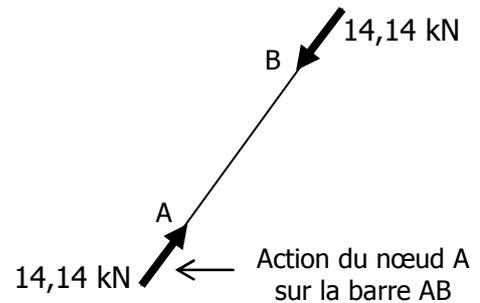
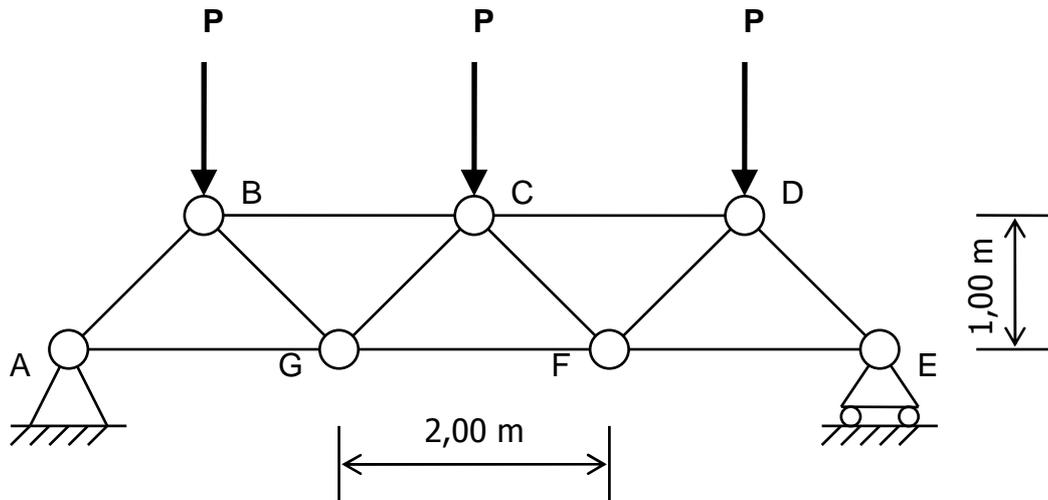


Tableau récapitulatif :

Quelque soit la méthode utilisée (analytique ou graphique), il faudra conclure par un tableau récapitulatif du type suivant :

barres	intensités (kN)	sollicitations
AB	- 14,14	compression
BC	- 10,00	compression
CD	- 14,14	compression
ED	+ 10,00	traction
AE	+ 10,00	traction
BE	0	aucune
CE	0	aucune

V - APPLICATION :**Données :**

- $AG = GF = FE = BC = CD$
- $AB = BG = GC = CF = FD = DE$
- $P = 10 \text{ kN}$

Travail demandé :

- 1) Calculez les longueurs des différentes barres.
- 2) Vérifiez l'isostaticité du système.
- 3) Calculez les actions de liaisons en A et E.
- 4) Calculez la valeur de l'effort dans la barre CF et déterminez son état (compression ou traction) par la méthode de RITTER.
- 5) Calculez les valeurs des efforts et les états dans toutes les autres barres par la méthode d'isolement des nœuds.