CHAPITRE 06 : LES SOLLICITATIONS
LES GRAPHES DE VARIATION

I - NOTION DE COUPURE.

II - DEFINITION DES SOLLICITATIONS.

III - TRACE DES GRAPHES DE VARIATION DES SOLLICITATIONS.

31) Tracé des graphes de variation des sollicitations avec leurs équations

32) Tracé des graphes de variation des sollicitations sans leurs équations

I - NOTION DE COUPURE :

Nous allons dans ce chapitre déterminer la nature et la répartition des efforts à l'intérieur de la matière.

Pour cela, considérons une poutre droite reposant sur un appui simple en B et une articulation en A.
Cette poutre est soumise à un chargement réparti p.

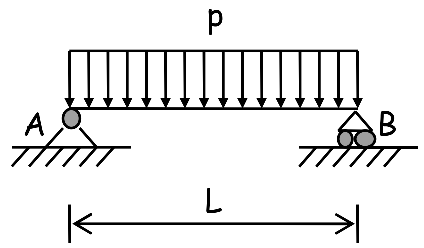
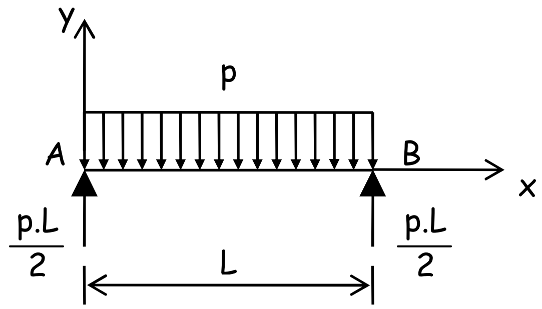
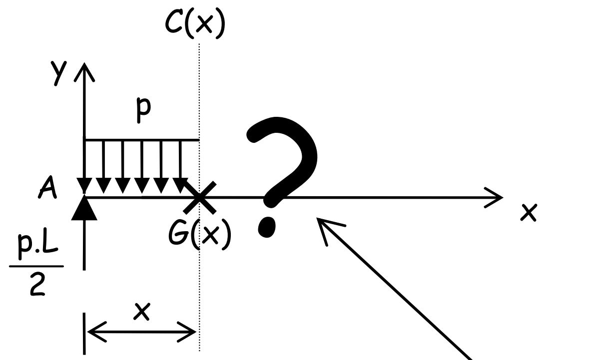


Schéma mécanique de la poutre : après application du P.F.S., la poutre est donc soumise non seulement au chargement réparti p mais également aux actions de liaison en A et B.



Effectuons par la pensée une coupure fictive à l'abscisse x quelconque que nous noterons C(x).

Isolons le tronçon situé à gauche de la section fictive C(x).

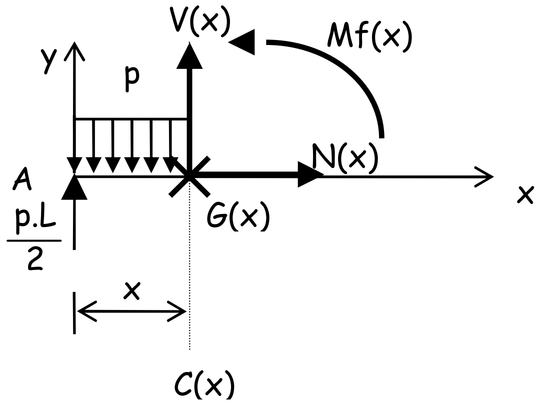


Mais ce tronçon est en équilibre que si l'on prend en compte :

- Les actions extérieures : ici celle de la charge répartie p,
- Les actions de liaison en A : ici Ay ,
- Les actions que le tronçon de droite exerce sur le tronçon de gauche (ces forces se développent à l'intérieur de la matière).

II - DEFINITION DES SOLLICITATIONS :

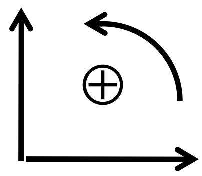
En terminale Génie Civil nous ne travaillons que sur des problèmes plans.



Ainsi nous représenterons ces « forces intérieures » par leurs projections sur les axes x, y :

Par définition, les projections de ces « forces intérieures » sont appelées **sollicitations**.

A ce stade du calcul, les sollicitations N(x), V(x) et Mf(x) sont des inconnues. C'est pourquoi nous les représenterons par convention par un vecteur orienté dans le sens positif des axes. Le sens positif du moment fléchissant porté par l'axe z sera celui du sens trigonométrique.



Nous pouvons exprimer ces sollicitations sous la forme d'un torseur, écrit au centre de gravité G(x) de la section C(x) : par définition ce torseur s'appelle **torseur des sollicitations ou torseur de cohésion** :

$$\tau_{\text{des sollicitations}} = \left\{ \begin{matrix} N(x) & 0 \\ V(x) & 0 \\ 0 & Mf(x) \end{matrix} \right\}_{G(x)}$$

avec :

- N(x) : effort normal à l'abscisse x
- V(x) : effort tranchant à l'abscisse x
- Mf(x) : moment fléchissant suivant l'axe z

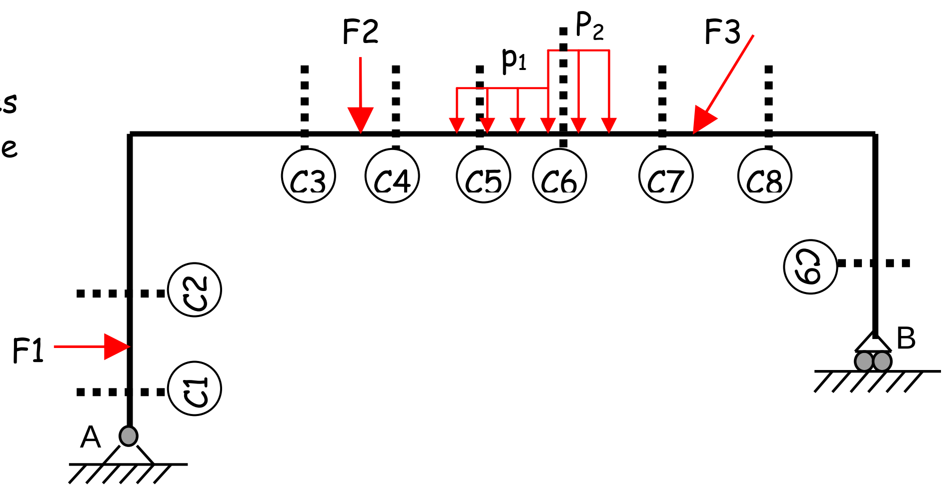
Les coupures :

Les coupures sont réalisées chaque fois que la structure rencontre des variations :

- de chargement

et/ou

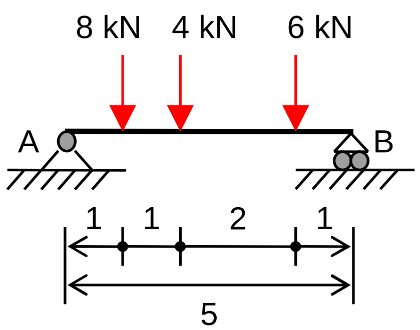
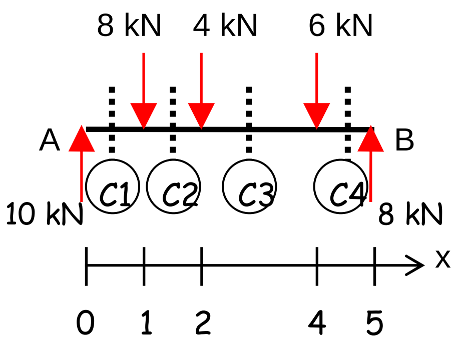
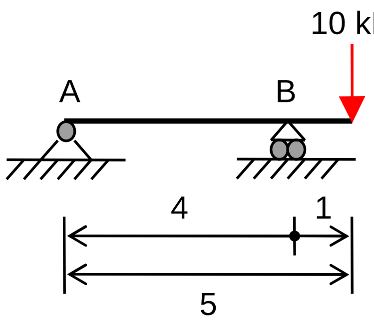
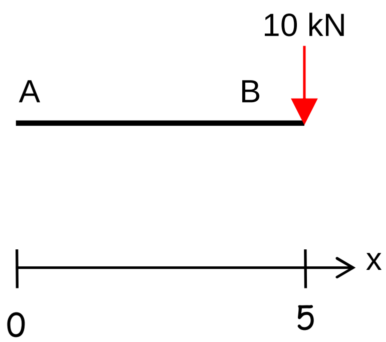
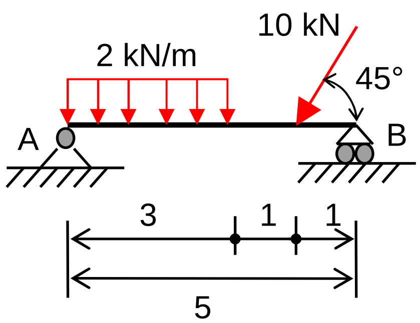
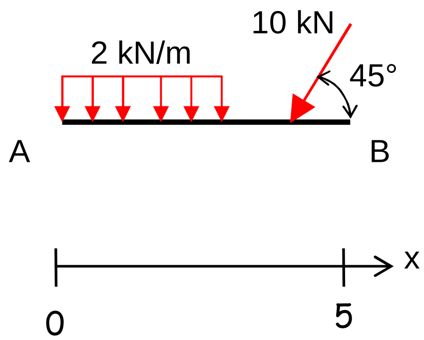
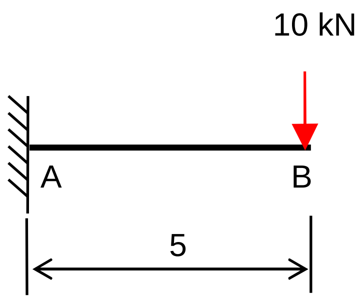
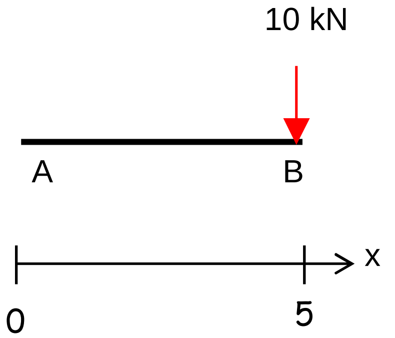
- de géométrie



Exercices d'application :

Pour les structures suivantes :

- Déterminez le nombre de coupures fictives à effectuer,
- Déterminez les abscisses de ces coupures fictives.

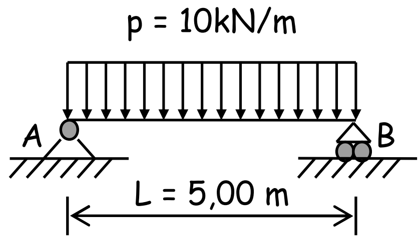
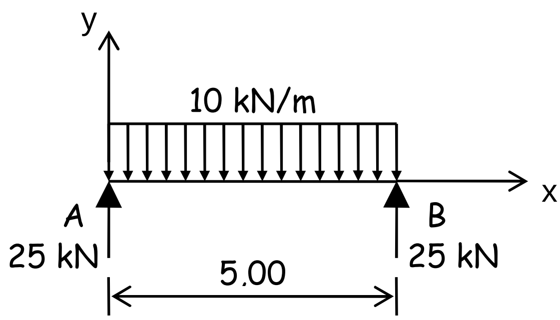
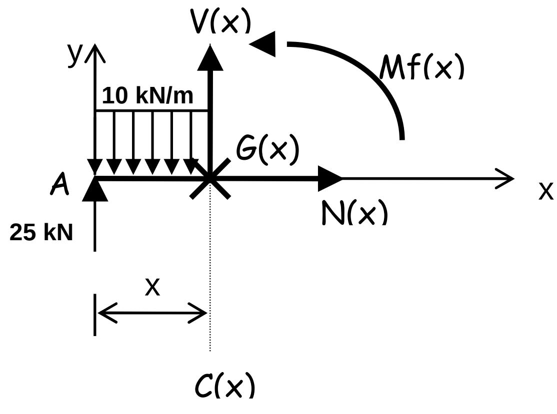
SYSTEME	COUPURE	SCHEMA RECAPITULATIF
	***Exemple*** **:** • *nombre de coupures : 4* • *abscisse des coupures :* *C1 :* $0 \leq x \leq 1$ *C2 :* $1 \leq x \leq 2$ *C3 :* $2 \leq x \leq 4$ *C4 :* $4 \leq x \leq 5$	
	• *nombre de coupures :* • *abscisse des coupures :*	
	• *nombre de coupures :* • *abscisse des coupures :*	
	• *nombre de coupures :* • *abscisse des coupures :*	

III - TRACE DES GRAPHES DE VARIATION DES SOLLICITATIONS :

31) Tracé des graphes des sollicitations avec leurs équations.

Le but de la théorie des poutres est de connaître le comportement de la matière dans toutes les sections d'une poutre, autrement dit de connaître la variation des sollicitations le long de la poutre.

Déterminons la nature et la répartition des efforts à l'intérieur de la matière à travers cet exemple simple :

Une poutre droite reposant sur un appui simple en B et une articulation en A, soumise à un chargement réparti descendant p = 10 kN/m.	
Schéma récapitulatif : la poutre est donc soumise non seulement au chargement réparti p mais également aux actions de liaison en A et B.	
1 seule coupure est nécessaire : effectuons la coupure fictive à l'abscisse x quelconque que nous noterons C (x). Isolons le tronçon situé à gauche de C (x). Par équilibre N(x), V(x) et Mf(x) apparaissent, s'appliquant sur G(x).	

Ecriture du torseur de cohésion, **par rapport à G(x)**, de tous les efforts s'appliquant sur ce tronçon isolé, en fonction de x :

$$\tau_{/G} = \left\{ \begin{array}{cc} N(x) + 0 \ _{(1)} & 0 \\ V(x) + 25 - 10 \cdot x \ _{(2)} & 0 \\ 0 & _{(3)}\ Mf(x) + 10 \cdot x \cdot \dfrac{x}{2} - 25 \cdot x \end{array} \right\} = \{0\}$$

Pour connaître les sollicitations dans toutes les sections, il suffit alors de faire varier x le long de la poutre. On obtient alors les graphes de variation des sollicitations N, V et Mf en fonction de x. Chaque expression des sollicitations s'étudie comme une fonction :

(1) **$N(x) = 0$**

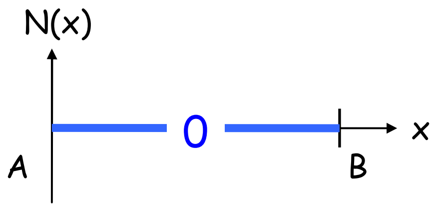
(2) **$V(x) = 10\,x - 25$**

(3) **$Mf(x) = -5\,x^2 + 25\,x$**

Tracé de la variation de l'effort normal N(x) à partir de son équation

(1) **$N(x) = 0$** ⇔ constante (y = constante)

Fonction :	Domaine d'étude	
N(x) = 0	0	5
Sens de variation	nul	



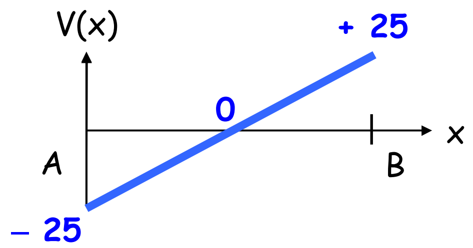
Tracé de la variation de l'effort tranchant V(x) à partir de son équation

(2) **$V(x) = 10\,x - 25$** ⇔ fonction affine (y = a x + b)

Remarque 1 : le coefficient directeur de la droite « a » est égal à la valeur opposée de la charge répartie : p = - 10 kN/m et a = 10.

Remarque 2 : l'ordonnée à l'origine « b » est égale à la valeur opposée de l'action qui s'y applique : Ay = + 25 kN et V(0) = - 25 kN = b

Fonction :	Domaine d'étude		
V(x) = 10 x - 25	0	2,5	5
Sens de variation	**– 25** ↗	**0** ↗	**+ 25**

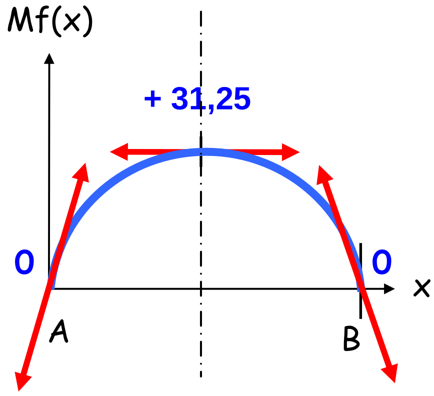


Remarque 3 : lorsque le ***système est symétrique***, le tracé de ***V(x) est symétrique par rapport au point central de symétrie***.

Tracé de la variation du moment fléchissant Mf(x) à partir de son équation et aussi de l'équation de l'effort tranchant

(3) **$Mf(x) = -5x^2 + 25x$** ⇔ fonction parabolique ($y = a x^2 + b x + c$)

Fonction :	Domaine d'étude
$Mf(x) = -5x^2 + 25x$	0 2,5 5
Dérivée de Mf(x) : $[Mf(x)]' = -10x + 25$	⊕ **0** ⊖
Sens de variation	0 ↗ + 31,25 ↘ 0



Remarque 4 : lorsque le ***système est symétrique***, le tracé de ***Mf(x) est symétrique par rapport à l'axe central de symétrie***.

Remarque 5 : l'équation de V(x) est, au signe près, égale à la dérivée de l'équation de Mf(x).

$$\boxed{[\,Mf(x)\,]' = -[\,V(x)\,]}$$

Pour cet exemple, calculez l'équation de la dérivée de l'équation du moment fléchissant :

$[Mf(x)]' = [-5x^2 + 25x]' = -10x + 25 = -(10x - 25) = -[V(x)]$

Ainsi :

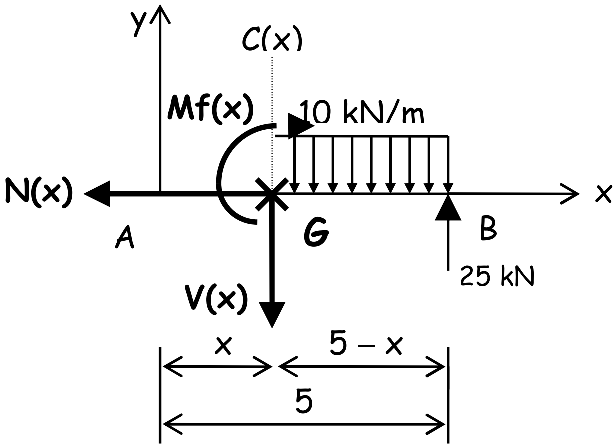
- lorsque V(x) est négatif, Mf(x) est croissant ;
- lorsque V(x) est positif, Mf(x) est décroissant ;
- lorsque V(x) est nul en un point, Mf(x) admet une tangente horizontale en ce point ;
- en x = 0, Mf(x) admet une tangente de coefficient directeur - V(0) soit +25 ;
- en x = 5, Mf(x) admet une tangente de coefficient directeur +V(5) soit –25.

En isolant le tronçon à droite de la coupure C(x) :

Dans certains cas, il peut être plus facile d'appliquer le P. F. S. au tronçon isolé à droite de la coupure fictive C(x).

Dans ce cas, d'après les conventions que nous avons adoptées, les ***sollicitations*** seront comptées ***négatives***.

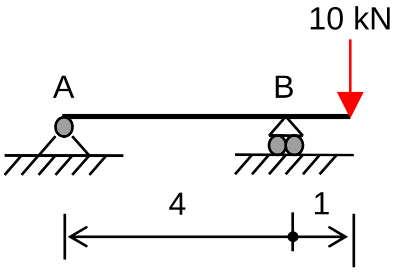
La coupure fictive se situe toujours à l'abscisse x.
Le tronçon isolé a une ***longueur*** égale à ***(5 – x).***



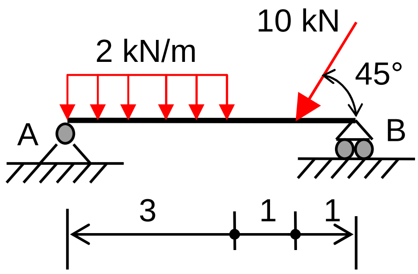
Exercices d'application :

Pour les structures suivantes :

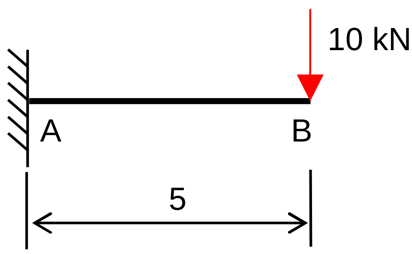
- Déterminez les équations des sollicitations N(x), V(x) et Mf(x) le long de la structure,
- Tracez les graphes de variation des sollicitations le long de la structure.



Ax = 0 ; Ay = - 2,5 kN ; By = 12,5 kN
2 coupures sont nécessaires :
C1 : $0 \leq x \leq 4{,}00$
C2 : $4.00 \leq x \leq 5.00$



Ax = 7,07 kN ; Ay = 5,61 kN ; By = 7,46 kN
3 coupures sont nécessaires :
C1 : $0 \leq x \leq 3{,}00$
C2 : $3{,}00 \leq x \leq 4{,}00$
C3 : $4.00 \leq x \leq 5.00$

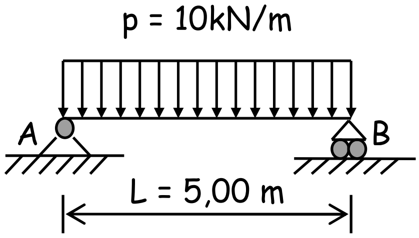


Ax = 0 ; Ay = 10 kN ; M_A = 50 kN.m
1 coupure est nécessaire :
C1 : : $1{,}00 \leq x \leq 5{,}00$

32) Tracé des graphes des sollicitations sans leurs équations.

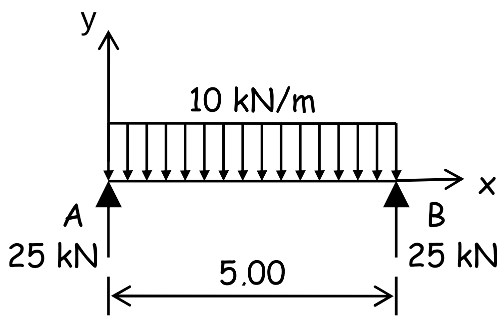
Avec une certaine pratique, les graphes des sollicitations se tracent facilement sans utiliser leurs équations.
Ce gain de temps considérable implique de suivre 3 étapes.

Exemple 1 :



ETAPE 1 :

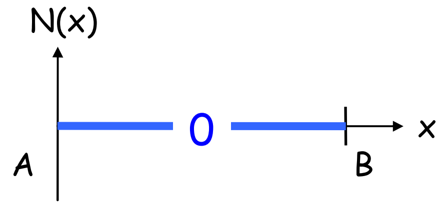
Calculer les inconnues des liaisons extérieures et représentez le schéma récapitulatif du système.



ETAPE 2 :

<u>Tracer N(x) :</u>

Aligner le tracé de N(x) avec le schéma récapitulatif.
Ici, N(x) est nul le long de la structure.

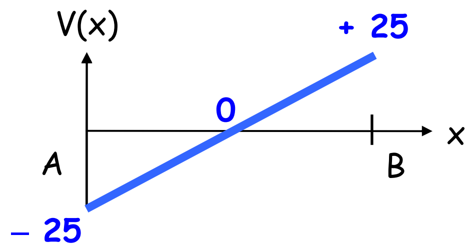


<u>Tracer V(x) :</u>

Aligner le tracé de V(x) avec le schéma récapitulatif.

- Commencer le tracé par la gauche :
  V(0) = - Σ (forces verticales à gauche)
  Ici, V(0) = - (25) kN
- Allure du tracé en fonction du chargement :

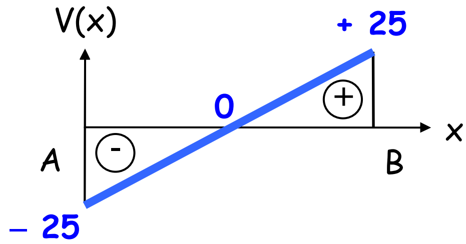
  Chargement réparti : allure de V(x) en droite oblique dont le coefficient directeur est égal à la valeur opposée de la charge répartie :
  Ici p = -10 kN/m donc a = 10
  V(x) = 10 x + b ⇔ droite oblique croissante
  Or V(0) = - 25 = b
  Donc V(x) = 10 x – 25
  Ainsi V(5) = + 25



- Terminer le tracé par la droite et se vérifier :
  V(5) = + Σ (forces verticales à droite)
  Ici, V(5) = + (25) kN

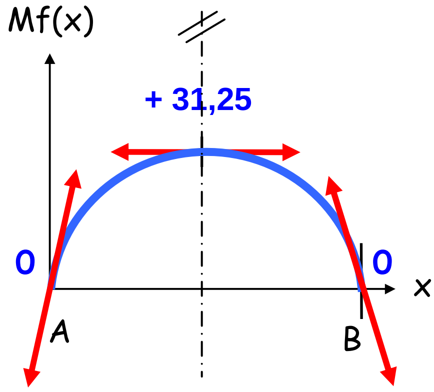
ETAPE 3 :

<u>Tracer Mf(x) :</u>

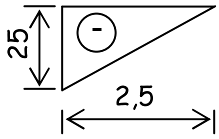


Aligner le tracé de Mf(x) avec celui de V(x).
Mf(x) se trace à partir du tracé de V(x) en utilisant **la méthode des aires.**

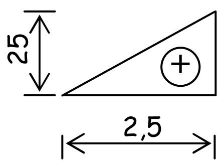
- Commencer le tracé par la gauche :
  Mf(0) = - Σ (moments à gauche)
  Ici, Mf(0) = 0



- Relation entre V(x) et Mf(x) : [Mf(x)]' = - [V(x)]
  - Allure du tracé en fonction du chargement :
    Chargement réparti : allure parabolique de Mf(x).
    Ici, le chargement est réparti entre 0 et 5 m donc, Mf(x) est une parabole entre 0 et 5 m.
  - De 0 à 2,5 m : V(x) est négatif alors Mf(x) croît.
    Ici, Mf(x) croît de la valeur de l'aire de l'effort tranchant négatif :
    Mf(2,5) = 0 + (aire de l'effort tranchant négatif)
    Mf(2,5) = 0 + (aire du triangle)
    Mf(2,5) = 0 + (25 $\times$ 2,5) / 2 = + 31,25 kN.m



  - A 2,5 m : V(x) = 0, alors Mf(x) admet une tangente horizontale en ce point.
    Ici, le tracé de Mf admet une tangente horizontale en x = 2,5 m.
  - De 2,5 m à 5,0 m : V(x) est positif alors Mf(x) décroît.
    Ici, Mf(x) décroît de la valeur de l'aire de l'effort tranchant positif :
    Mf(5) = 31,25 - (aire de l'effort tranchant positif)
    Mf(5) = 31,25 - (aire du triangle)
    Mf(5) = 31,25 - (25 $\times$ 2,5) / 2 = 0 kN.m



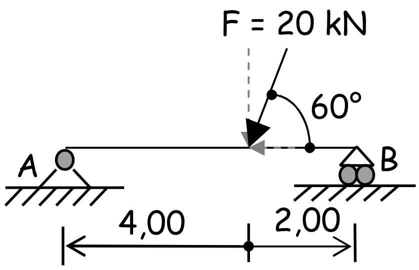
  - en x = 0, Mf(x) admet une tangente de coefficient directeur - V(0) soit +25.
  - en x = 5, Mf(x) admet une tangente de coefficient directeur +V(5) soit –25.

- Terminer le tracé par la droite et se vérifier :
  Mf(5) = - Σ (moments à droite)
  Ici, Mf(5) = 0

Système symétrique

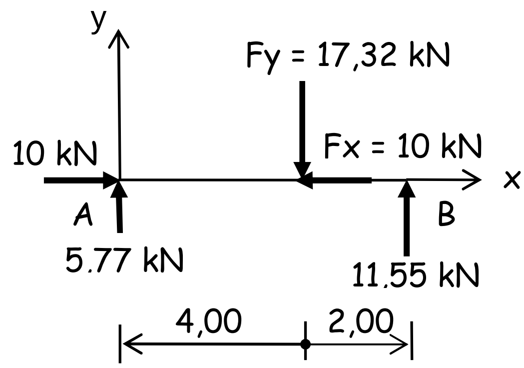
- Le tracé de Mf(x) est symétrique par rapport à l'axe de symétrie ;
- Le tracé de V(x) est symétrique par rapport au point central de symétrie.

Exemple 2 :



ETAPE 1 :

Calculer les inconnues des liaisons extérieures et représentez le schéma récapitulatif du système.

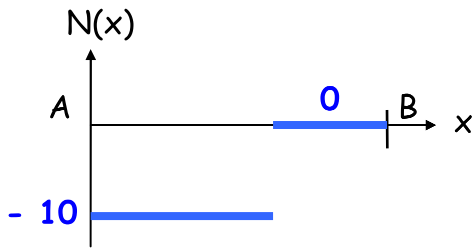


ETAPE 2 :

<u>Tracer N(x) :</u>

Aligner le tracé de N(x) avec le schéma récapitulatif.

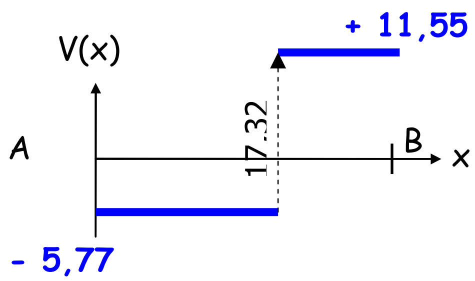
- Commencer le tracé par la gauche :
  N(0) = - Σ (forces horizontales à gauche)
  Ici, N(0) = - (10) kN
- Allure du tracé en fonction du chargement :
  Chargement ponctuel : entraîne un tracé sous forme de paliers horizontaux.
  Entre 0 et 4 m :
  Compression constante égale à – 10 kN.
  Entre 4 m et 5 m :
  Pas de sollicitation, constante égale à 0.
- Terminer le tracé par la droite et se vérifier :
  N(6) = + Σ (forces horizontales à droite)
  Ici, N(6) = + (0) kN



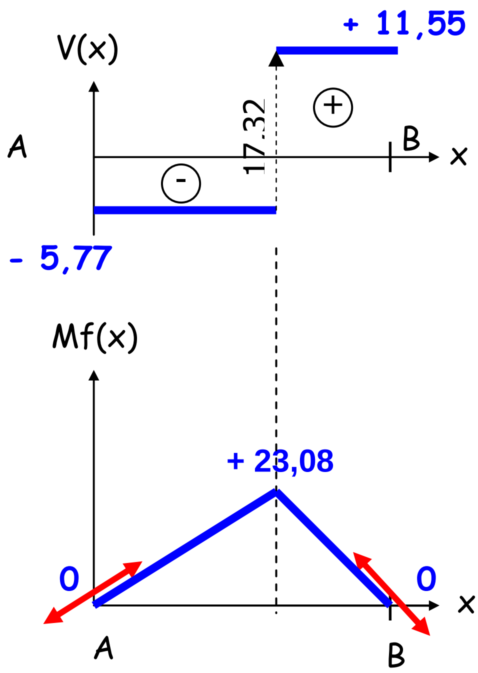
<u>Tracer V(x) :</u>

Aligner le tracé de V(x) avec le schéma récapitulatif.

- Commencer le tracé par la gauche :
  V(0) = - Σ (forces verticales à gauche)
  Ici, V(0) = - (5,77) kN
- Allure du tracé en fonction du chargement :
  Le chargement ponctuel : entraîne un tracé sous forme de paliers horizontaux.
- Terminer le tracé par la droite et se vérifier :
  V(6) = + Σ (forces verticales à droite)
  Ici, V(6) = + (11,55) kN



ETAPE 3 :



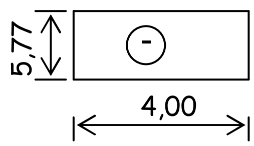
Tracer Mf(x) :
Aligner le tracé de Mf(x) avec celui de V(x).
Mf(x) se trace à partir du tracé de V(x) en utilisant **la méthode des aires.**

- Commencer le tracé par la gauche :
  Mf(0) = - Σ (moments à gauche)
  Ici, Mf(0) = 0

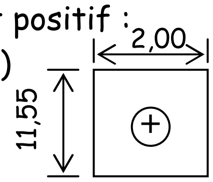
- Relation entre V(x) et Mf(x) : [Mf(x)]' = - [V(x)]

  - Allure en fonction du chargement :
    Chargement ponctuel : allure de Mf(x) en droites obliques.

  - De 0 à 4 m : V(x) est négatif alors Mf(x) croît.
    Ici, Mf(x) croît de la valeur de l'aire de l'effort tranchant négatif :
    Mf(4) = 0 + (aire de l'effort tranchant négatif)
    Mf(4) = 0 + (aire du rectangle)
    Mf(4) = 0 + (5,77 $\times$ 4) = + 23,08 kN.m



  - De 4 m à 6 m : V(x) est positif alors Mf(x) décroît.
    Ici, Mf(x) décroît de la valeur de l'aire de l'effort tranchant positif :
    Mf(6) = 23,08 - (aire de l'effort tranchant positif)
    Mf(6) = 23,08 - (aire du triangle)
    Mf(6) = 23,08 - (11,55 $\times$ 2) = 0 kN.m



  - en x = 0, Mf(x) admet une tangente de coefficient directeur - V(0) soit + 5,77.
  - en x = 6, Mf(x) admet une tangente de coefficient directeur - V(6) soit – 11,55.

- Terminer le tracé par la droite et se vérifier :
  Mf(6) = - Σ (moments à droite)
  Ici, Mf(6) = 0

Exercices d'application :

Reprendre les exercices proposés en page 8/12 et tracer les graphes de variations des sollicitations N(x), V(x) et Mf(x) sans utiliser leurs équations.