CHAPITRE 8 : CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS

INTRODUCTION : replaçons - nous dans le programme de mécanique

I – CALCUL DE LA POSITION DU CENTRE DE GRAVITE

II – QUE DEFINIT - ON PAR CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS?

III – MOMENT QUADRATIQUE (OU MOMENT D'INERTIE) D'UNE SECTION.

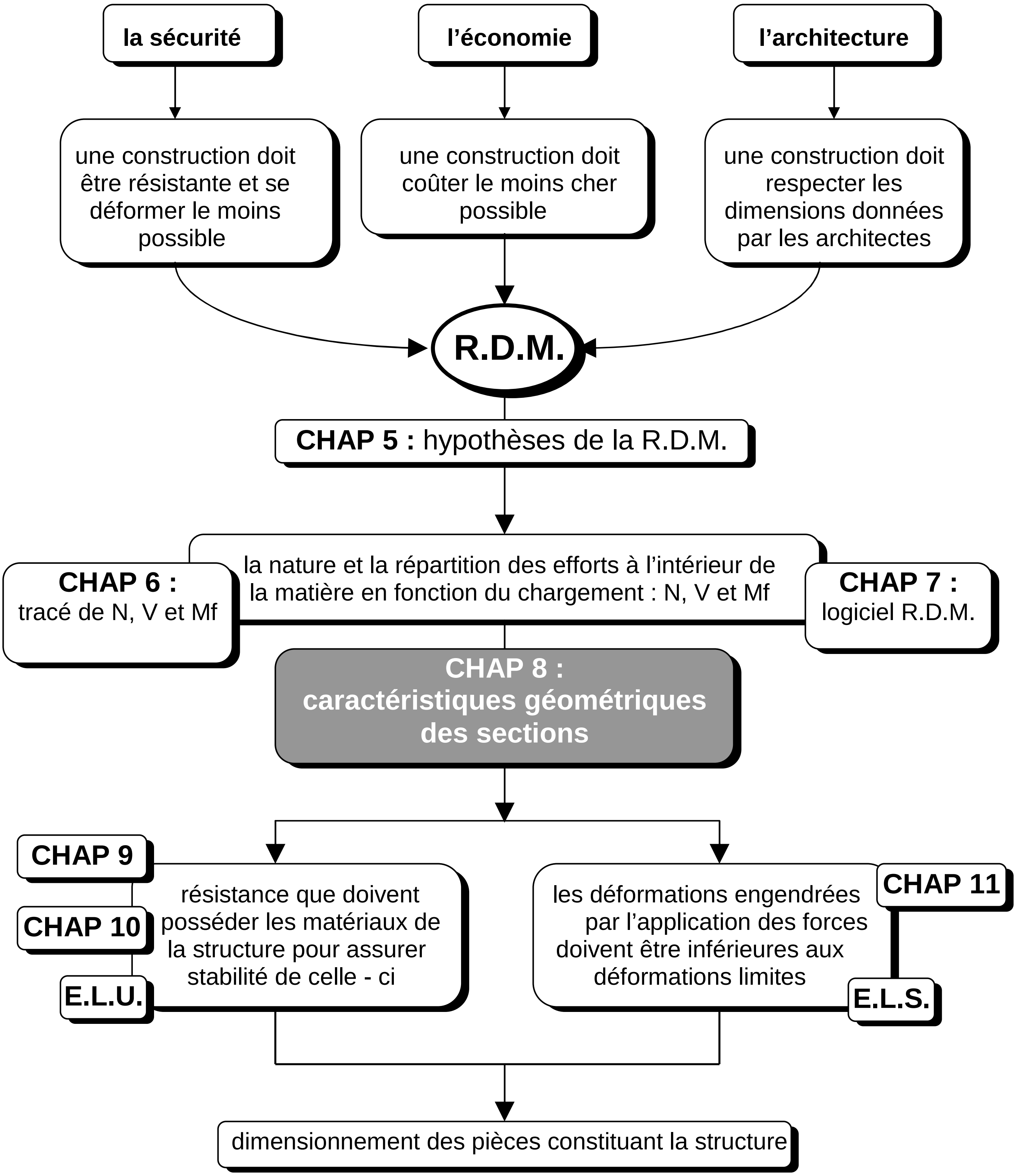
3-1) DEFINITION
3-2) THEOREME DE HUYGENS
3-3) MODULE D'INERTIE

IV – MOMENT STATIQUE D'UNE SECTION.

V – CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES PROFILES METALLIQUES

INTRODUCTION : replaçons - nous dans le programme de mécanique

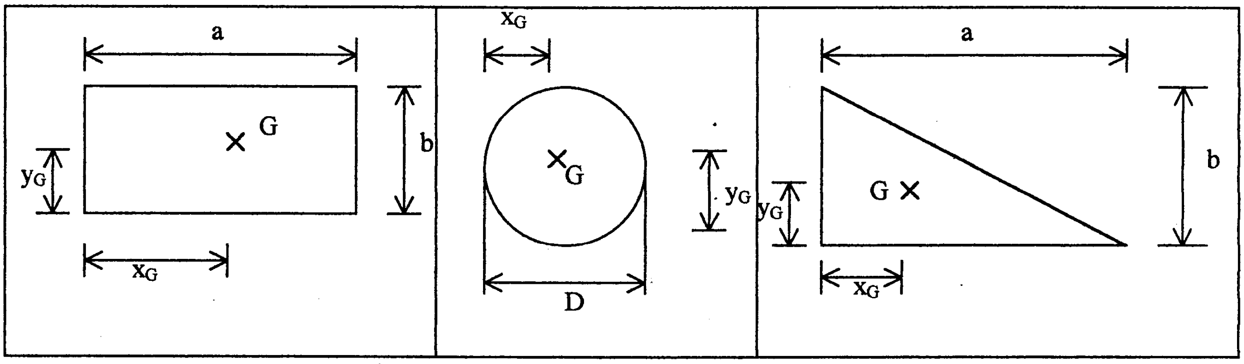
Nous avons déjà vu qu'au niveau de la conception d'un ouvrage l'on devait respecter certains critères, qui peuvent être parfois contradictoires au départ :



Pour calculer les caractéristiques géométriques des sections, nous devons savoir calculer la position de leur centre de gravité.

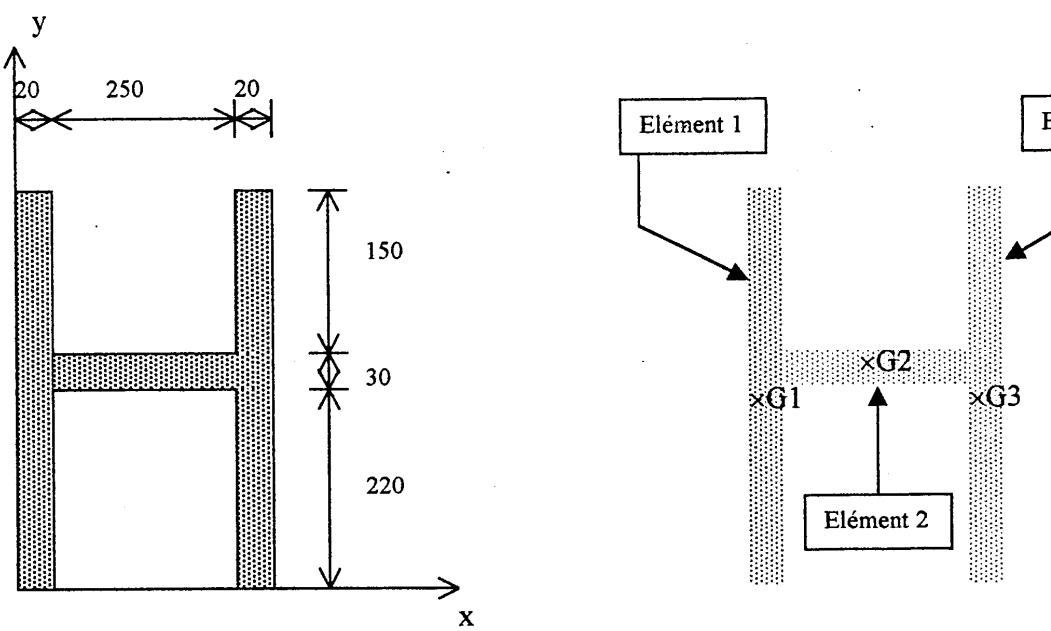
I – CALCUL DE LA POSITION DU CENTRE DE GRAVITE

1. Sections simples



ELEMENT	AIRE	XG	YG
Rectangle			
Triangle			
Cercle			

2. Sections composées



Déterminer la position de G en mm.

DEFINITION DE G, centre de gravité de la section composé :
c'est le barycentre des CdG des éléments qui composent la section, affectés des aires de ces éléments.

CALCUL DE G suivant cette DEFINITION :
$XG = (A_1 \times X_{G1} + A_2 \times X_{G2} + A3 \times X_{G3}) / (A_1 + A_2 + A_3) = 145$ mm
$YG = \ldots = 211{,}2$ mm

CALCUL DE G avec un tableau :

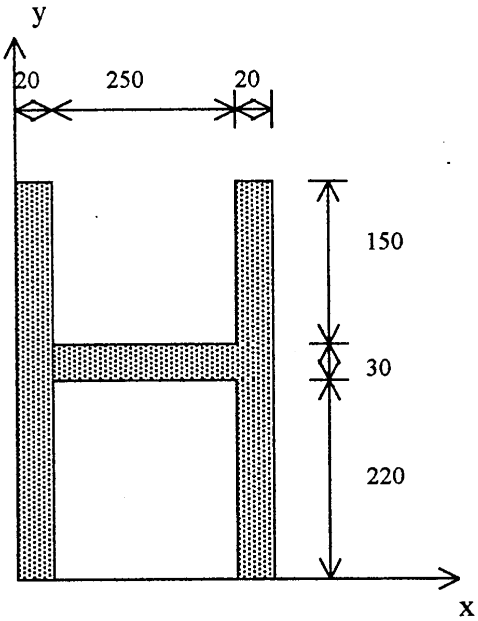
ELEMENT	AIRE Ai	X_{Gi}	X_{Gi} x Ai	Y_{Gi}	Y_{Gi} x Ai
1					
2					
3					

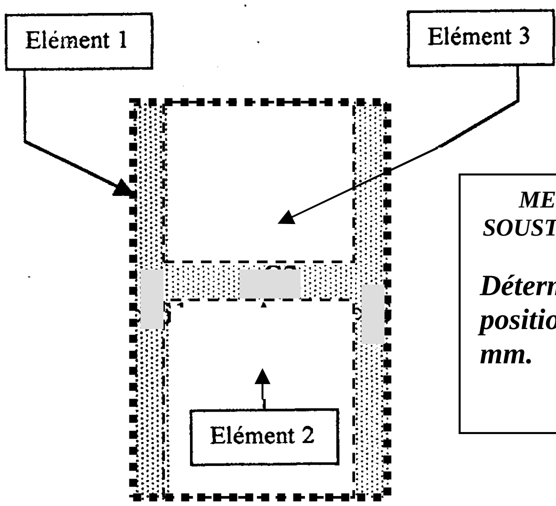
		X_G =		Y_G =	

<u>CONCLUSION DE CET EXERCICE : METHODE POUR LE CALCUL DE G</u>

- PHASE 1 = décomposition de la section (méthode additive ou soustractive)
- PHASE 2 = recherche d'un axe de symétrie (le centre de gravité est sur cet axe)
- PHASE 3 = calcul en tableau

Si l'énoncé ne précise pas d'unité pour les calculs, on choisira le cm².





METHODE SOUSTRACTIVE :

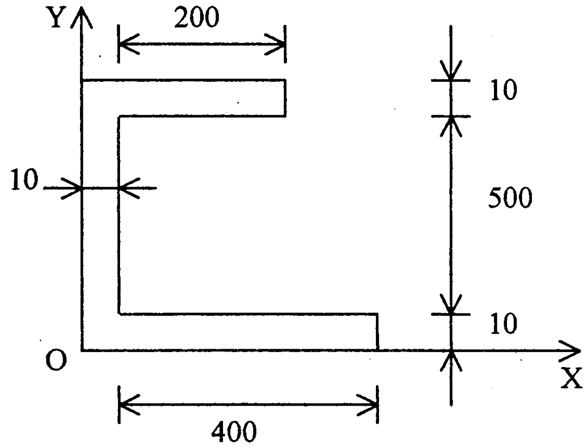
Déterminer la position de G en mm.

ELEMENT	AIRE Ai	X_{Gi}	X_{Gi} x Ai	Y_{Gi}	Y_{Gi} x Ai
1					
2					
3					

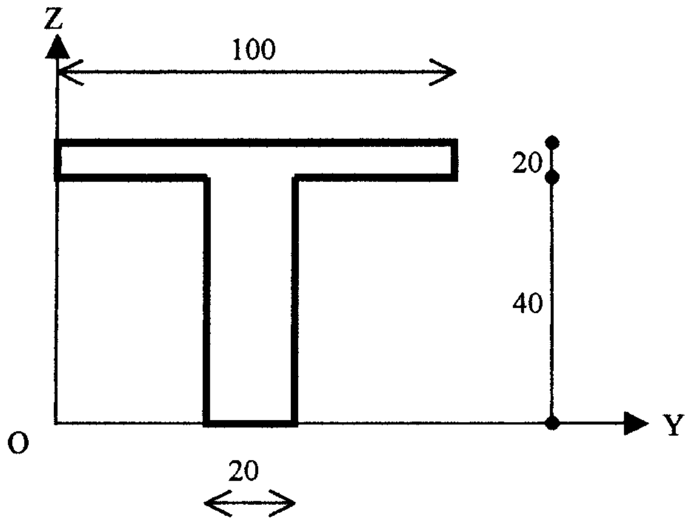
X_G =		Y_G =	

3. Exercices à faire à la maison

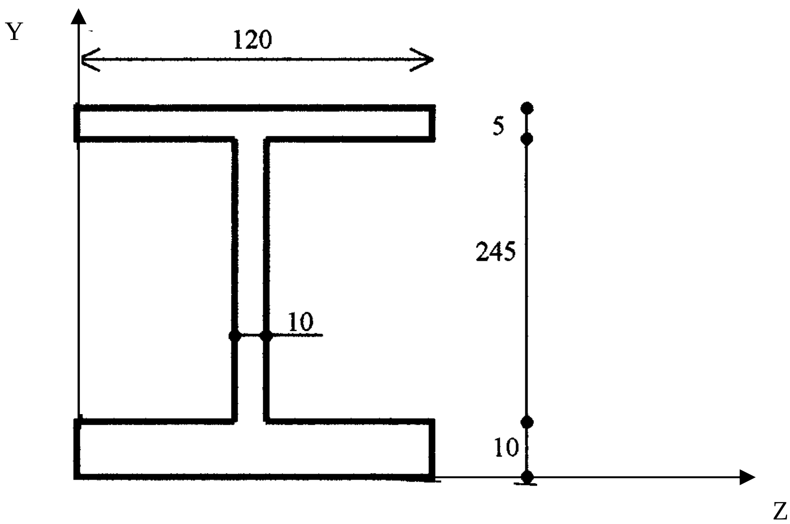
3.1) Déterminez les coordonnées du CdG



3.2) Déterminez les coordonnées du CdG



3.3) Déterminez les coordonnées du CdG

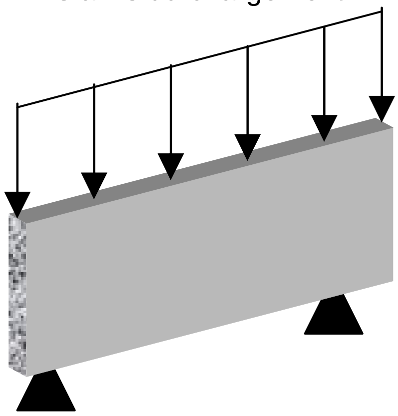


II – QUE DEFINIT - ON PAR CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS ?

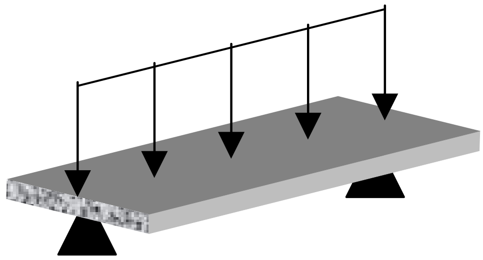
Faisons une première expérience :
Sollicitons par un chargement réparti une poutre de section rectangulaire posée sur deux appuis : section de 10 cm x 80 cm soit une surface de 800 cm².

Il existe deux façons de positionner cette poutre vis à vis du chargement :

CAS N°1 : poutre posée à chant vis à vis du chargement



CAS N°2 : poutre posée à plat vis à vis du chargement

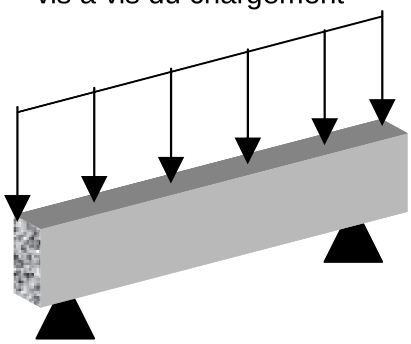


Intuitivement, on peut ressentir facilement que la poutre résistera moins et se déformera plus dans le CAS N°2 que dans le CAS N°1.

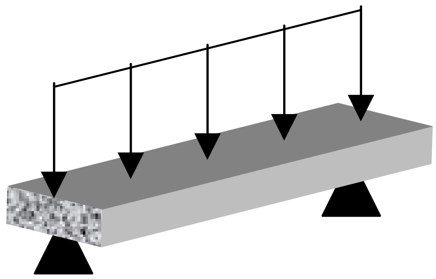
Faisons une deuxième expérience :
Sollicitons par un chargement réparti une poutre de section rectangulaire posée sur deux appuis : section de 20 cm x 40 cm soit une même surface de 800 cm².

Nous retrouvons les deux positions de la poutre vis à vis du chargement :

CAS N°3 : poutre posée à chant vis à vis du chargement



CAS N°4 : poutre posée à plat vis à vis du chargement



Intuitivement, on peut ressentir facilement que la poutre résistera moins et se déformera plus dans le CAS N°4 que dans le CAS N°3. On peut aussi ressentir que la poutre résistera moins et se déformera plus dans le CAS N°3 que dans le CA S N°1.

Bilan sur les 2 expériences : bien que la quantité de matière soit identique pour ces 4 cas on voit bien que la rigidité de la poutre dépend de la répartition de la matière vis à vis du chargement.
Ainsi, nous venons de mettre en évidence de nouvelles caractéristiques géométriques qui tiennent compte de cette répartition de matière :

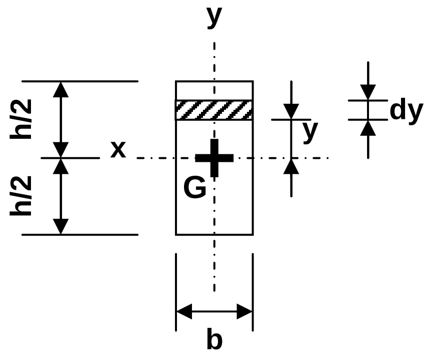
- **le moment d'inertie ;**
- **le moment statique.**

III – MOMENT D'INERTIE (OU MOMENT QUADRATIQUE) :

3-1) DEFINITION :

Un moment d'inertie est une grandeur géométrique qui caractérise la répartition de la masse matière dans une section par rapport à un axe. Le moment d'inertie caractérise ainsi son aptitude à résister au fléchissement (ou sa rigidité) vis à vis du chargement.

Mathématiquement le moment d'inertie d'un corps se calcule en faisant l'intégrale du produit de chaque élément de masse de ce corps par le carré (« quadratique » en latin signifie relatif au carré) de la distance de cet élément à un axe fixe (axe d'inertie).



En considérant une section rectangulaire b × h :

le moment d'inertie par rapport à l'axe x de cette section = $\int_{-h/2}^{+h/2} y^2 \cdot ds$

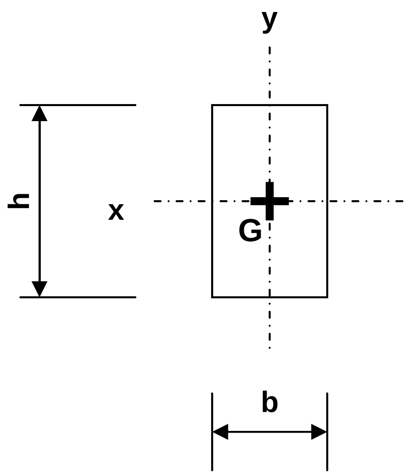
avec :

- ds , la section d'un élément de matière : ds = b . dy
- y² , le carré de la distance de cet élément à l'axe x
- $\int_{-h/2}^{+h/2}$ somme des ds sur une valeur de y variant de + h/2 à – h/2 par rapport à l'axe x

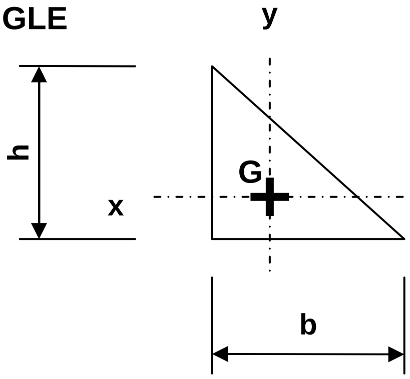
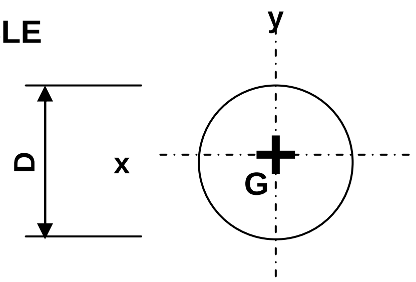
d'où $\int_{-h/2}^{+h/2} y^2 \cdot ds = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = b \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 \cdot dy = b \left[y^3/3 \right]_{-h/2}^{+h/2} = b \left[(h^3/24) - (-h^3/24) \right] = \dfrac{b.h^3}{12}$

Le moment d'inertie est une grandeur toujours positive et se calcule toujours par rapport à un axe.

Moments d'inertie, calculés par rapport aux axes qui passent par le centre de gravité, pour un rectangle :

SYMBOLE DU MOMENT QUADRATIQUE : I UNITE DU MOMENT QUADRATIQUE : m^4	Moment quadratique par rapport aux axes x ou Gx	Moment quadratique par rapport aux axes y ou Gy
SECTION RECTANGULAIRE	I_x ou I_{Gx}	I_y ou I_{Gy}
	$\dfrac{b \times h^3}{12}$	$\dfrac{h \times b^3}{12}$

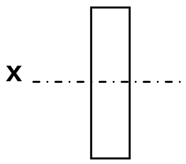
Pour mémoire, voici les moments d'inertie pour un triangle et un cercle :

<table>
<tr><th></th><th>I_x ou I_{Gx}</th><th>I_y ou I_{Gy}</th></tr>
<tr><td>TRIANGLE

</td><td>$$\frac{b \times h^3}{36}$$</td><td>$$\frac{h \times b^3}{36}$$</td></tr>
<tr><td>CERCLE

</td><td colspan="2">$$\frac{\pi \times r^4}{4}$$</td></tr>
</table>

APPLICATIONS :

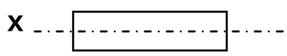
Calculez les moments quadratiques des sections rectangulaires des 4 CAS vus précédemment :

CAS N°1 :



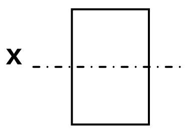
$I_x = I_{Gx} = \frac{0,1 \times 0,8^3}{12} = 4,26.10^{-3}\ m^4$

CAS N°2 :



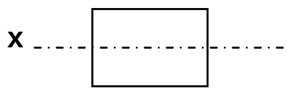
$I_x = I_{Gx} = \frac{0,8 \times 0,1^3}{12} = 6,67.10^{-5}\ m^4$

CAS N°3 :



$I_x = I_{Gx} = \frac{0,2 \times 0,4^3}{12} = 1,07.10^{-3}\ m^4$

CAS N°4 :



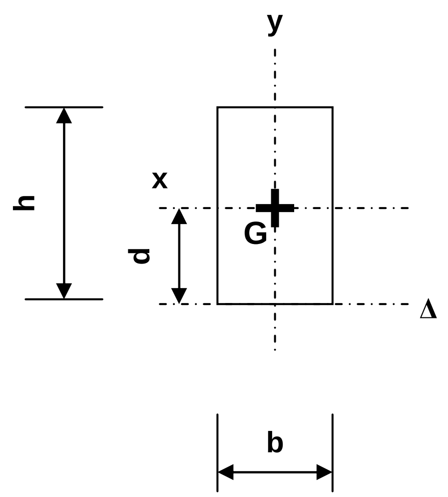
$I_x = I_{Gx} = \frac{0,4 \times 0,2^3}{12} = 2,67.10^{-4}\ m^4$

D'après les résultats trouvés, concluez : que constatez - vous?

Plus la valeur du moment quadratique de la section est forte , plus la poutre est rigide (plus elle résiste au fléchissement vis à vis du chargement).

3-2) MOMENT QUADRATIQUE CALCULE PAR RAPPORT A UN AXE QUELCONQUE : THEOREME DE HUYGENS.

On connaît généralement les moments quadratiques d'une section calculés par rapport aux axes passant par le centre de gravité : I_x et I_y .
On peut aisément calculer le moment quadratique de cette même section par rapport à un axe quelconque. Pour cela il suffit de lui ajouter ce qu'on appelle le transport de HUYGENS.



$I_\Delta = I_x$ + « transport de HUYGENS »

$I_\Delta = I_x + [d^2 \times A]$

Avec - d = distance entre les deux axes

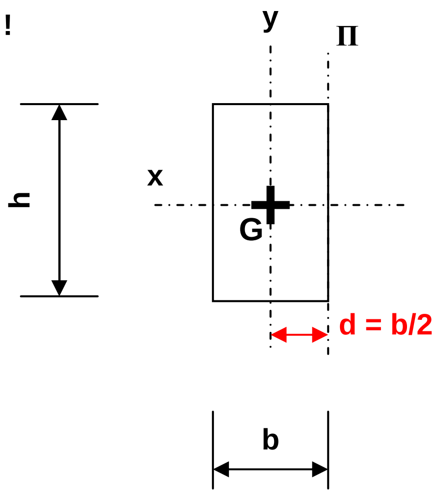
- A = surface de la section

$$I_\Delta = \frac{b \times h^3}{12} + \left[\frac{h^2}{2^2} \times (b \times h)\right] = \frac{b \times h^3}{3}$$

Plus on s'éloigne de l'axe Gx, plus I_Δ est grand !

Application :

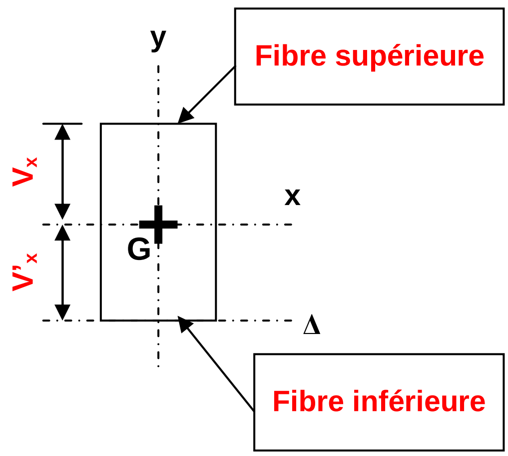
Exprimez le moment quadratique par rapport à l'axe Π de cette section rectangulaire en fonction de b et de h.



$$I_\Pi = \frac{h \times b^3}{12} + \left[\frac{b^2}{2^2} \times (b \times h)\right] = \frac{h \times b^3}{3}$$

3-3) MODULE D'INERTIE

En mécanique de Génie Civil, pour le dimensionnement des pièces, on utilise souvent une autre caractéristique géométrique directement issue du moment d'inertie (ou moment quadratique), c'est le module d'inertie.



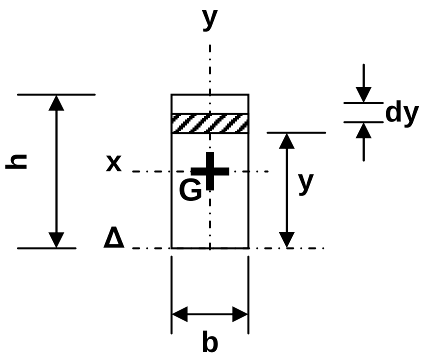
Module d'inertie = $\frac{I_x}{V_x}$ ou $\frac{I_x}{V'_x}$

Avec V_x = distance du c. d. g. à la fibre supérieure
V'_x = distance du c. d. g. à la fibre inférieure

IV – MOMENT STATIQUE :

Un moment statique est une grandeur géométrique qui caractérise la position du centre de gravité. En effet, au centre de Gravité on a **$Ms_{/Gx}$= 0 et $Ms_{/Gy}$= 0.**

Mathématiquement le moment statique se calcule en faisant l'intégrale du produit de chaque élément de matière par la distance de cet élément à un axe autre que celui qui passe par son centre de gravité.



En considérant une section rectangulaire b × h :

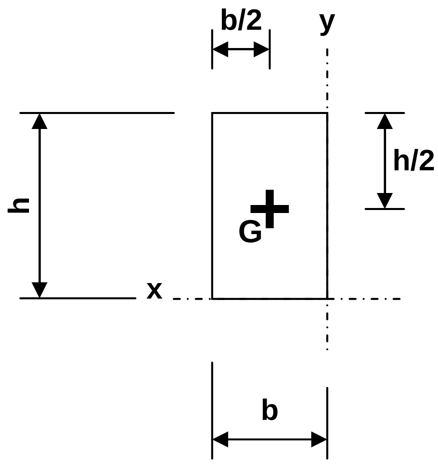
le moment statique par rapport à l'axe Δ de cette section = $\int_0^h y \,.\, ds$

avec :

- ds , la section d'un élément de matière : ds = b . dy
- y , la distance de cet élément à l'axe Δ variant de 0 à h
- $\int_0^h$ somme des ds sur une valeur de y variant de 0 à h par rapport à l'axe Δ

d'où $\int_0^h y \,.\, ds = \int_0^h y \,.\, b \,.\, dy = b \int_0^h y \,.\, dy = b \left[y^2/2 \right]_0^h = b \left[(h^2/2) \right] = \frac{b.h^2}{2} = b.h \times \frac{h}{2}$

Le moment statique, par rapport à un axe quelconque d'une section de surface A, est le produit de la surface A par la distance de son centre de gravité à cet axe quelconque (qui ne passe pas par le centre de gravité de la section).

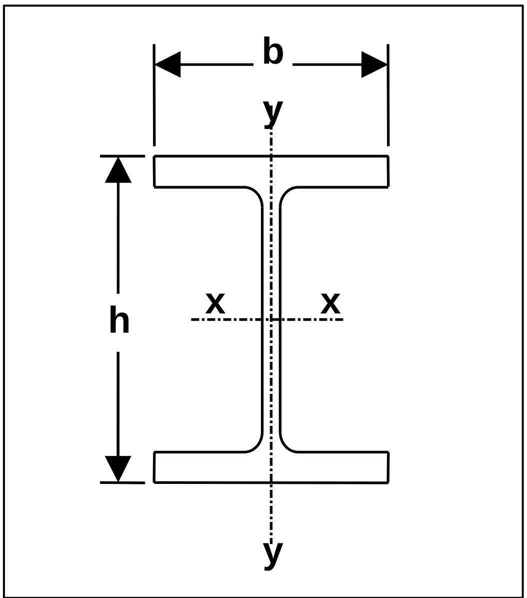
SYMBOLE DU MOMENT STATIQUE : **Ms** UNITE DU MOMENT STATIQUE : m^3	**Moment statique par rapport à l'axe x**	**Moment statique par rapport à l'axe y**
SECTION RECTANGULAIRE	**$Ms_{/x}$**	**$Ms_{/y}$**
	$(b \times h) \times \frac{h}{2}$	$(b \times h) \times \frac{b}{2}$

Remarque : le moment statique d'une section par rapport à un axe qui passe par son centre de gravité est nul.

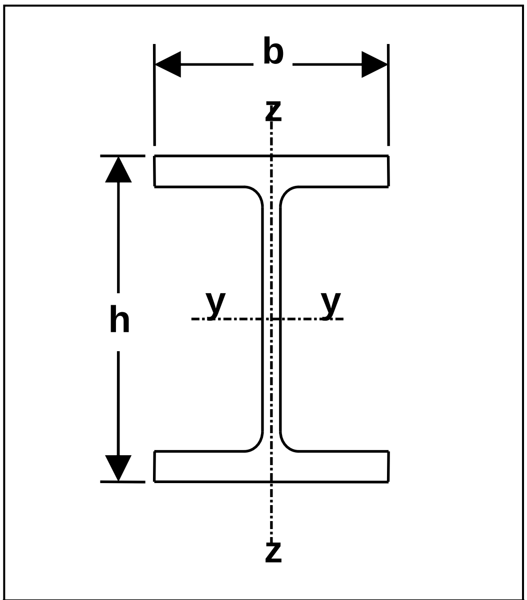
V - MOMENT QUADRATIQUE, MODULE D'INERTIE ET MOMENT STATIQUE DES PROFILES METALLIQUES :

Pour les profilés métalliques, il existe un catalogue « catalogue OTUA » qui donne toutes les caractéristiques géométriques des sections : moment quadratique, module d'inertie et moment statique. Vous n'avez donc rien à calculer, par contre vous devez savoir lire les tableaux de données.

Exemple avec un profilé HEM 100 : « extrait du catalogue OTUA »



axes : ancienne norme



axes : nouvelle norme

	Caractéristiques géométriques de calcul									
Ancienne Norme	I_x	I_x / v_x	i_x	$Ms/_x$		I_y	I_y / v_y	i_y	$Ms/_y$	
	Moment d'inertie	Module d'inertie		Moment statique		Moment d'inertie	Module d'inertie		Moment statique	
Nouvelle Norme	I_y cm^4	$W_{el.y}$ cm^3	i_y cm	$W_{pl.y}$ cm^3	A_{vz} cm^2	I_z cm^4	$W_{el.z}$ cm^3	i_z cm	$W_{pl.z}$ cm^3	A_{vy} cm^2
HE 100 M	1142,6	190,4	4,63	235,8	18,0	398,6	75,2	2,74	116,3	45,3